TD 4 : Réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé

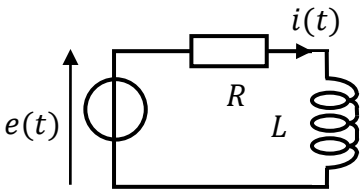
[ECUE : 2526_I_INF_FISE_S01_CN_OAC]

CORRIGE

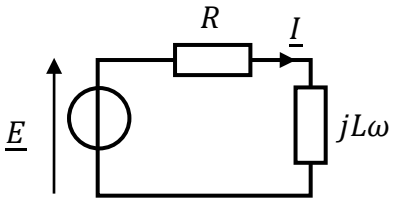
Exercice 1 :

Soit le circuit ci-contre où $e(t) = E\sqrt{2}\sin(\omega.t)$

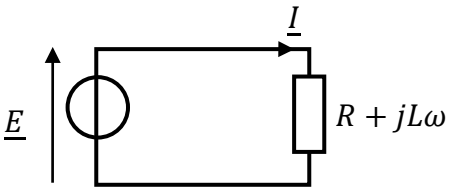
Déterminer l'expression de l'amplitude complexe $\underline{I}$ associée au courant $i(t)$.



On passe en représentation complexe. On pourra ainsi utiliser toutes les lois et tous les théorèmes vus précédemment.



La bobine et la résistance sont en série, on peut donc les associer.

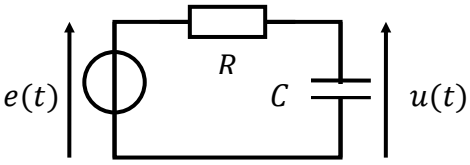


La tension aux bornes du dipôle équivalent est $\underline{E}$. En utilisant la « loi d'Ohm généralisée », on obtient donc :

$$\underline{I} = \frac{1}{R + jL\omega}.\underline{E}$$

Rq : Le courant $i(t)$ qui circule réellement dans le circuit s'écrira $i(t) = I.\sqrt{2}.\sin(\omega t + \varphi)$, avec $\begin{cases} I = |\underline{I}| \\ \varphi = \arg(\underline{I}) \end{cases}$.

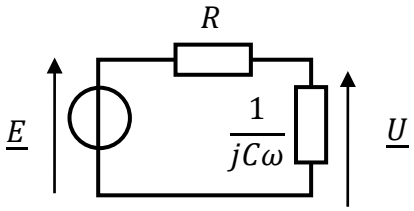
Exercice 2 :



Soit le circuit ci-contre où $e(t) = E\sqrt{2}\sin(\omega.t)$

Déterminer l'expression de l'amplitude complexe $\underline{U}$ associée à la tension $u(t)$.

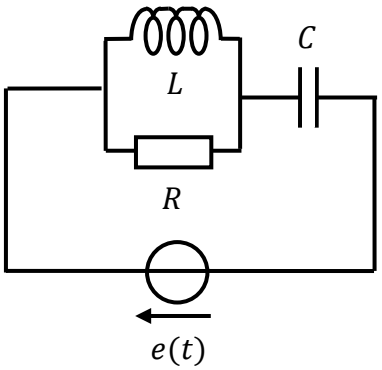
On passe en représentation complexe.



D'après la formule du pont diviseur de tension, on aura :

$$\underline{U} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R}.\underline{E} \Rightarrow \underline{U} = \frac{1}{1 + jRC\omega}.\underline{E}$$

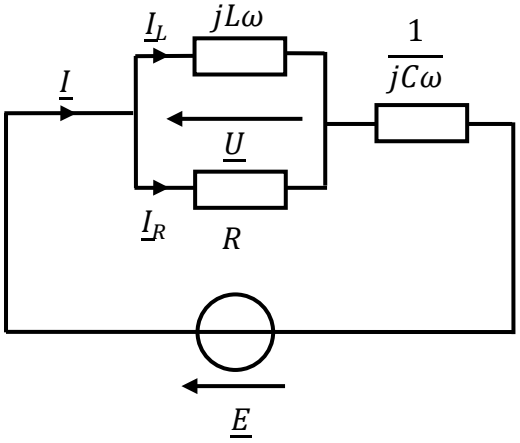
Exercice 3 :



Soit le circuit ci-contre où $e(t) = E\sqrt{2}.cos(\omega t)$.

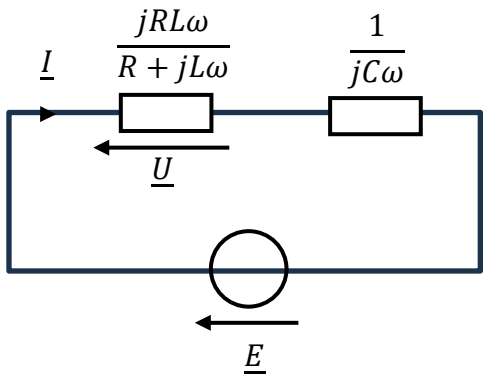
Déterminer les expressions des amplitudes complexes associées aux courants dans chacune des branches.

On passe en représentation complexe.



Si on parvient à trouver une expression pour $\underline{U}$, on pourra alors trouver les 3 courants $\underline{I_L}$, $\underline{I_R}$ et $\underline{I}$, grâce à la loi d'Ohm et à la loi des nœuds.

La bobine et la résistance sont en parallèle. On peut donc les associer et on obtient le schéma suivant :



D'après la formule du Pont Diviseur de Tension, on aura alors :

$$\underline{U} = \frac{\frac{jRL\omega}{R+jL\omega}}{\frac{jRL\omega}{R+jL\omega}+\frac{1}{jC\omega}} \times \underline{E} \times \frac{R+jL\omega}{R+jL\omega}$$

$$= \frac{jRL\omega}{jRL\omega + \frac{R+jL\omega}{jC\omega}} \times \underline{E} \times \frac{jC\omega}{jC\omega}$$

$$= \frac{-RLC\omega^2}{R - RLC\omega^2 + jL\omega} \times \underline{E}$$

On aura donc :

$$\underline{I_L} = \frac{\underline{U}}{jL\omega} = \frac{jRC\omega}{R - RLC\omega^2 + jL\omega} \times \underline{E}$$

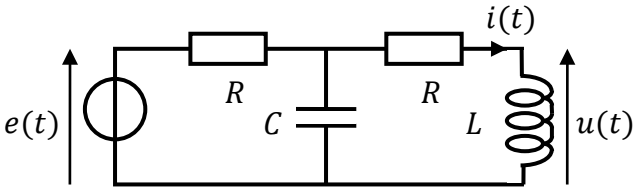
$$\underline{I_R} = \frac{\underline{U}}{R} = \frac{-LC\omega^2}{R - RLC\omega^2 + jL\omega} \times \underline{E}$$

$$\underline{I} = \underline{I_L} + \underline{I_R} = \frac{jRC\omega - LC\omega^2}{R - RLC\omega^2 + jL\omega} \times \underline{E}$$

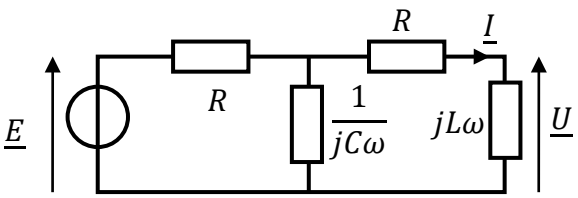
Exercice 4 :

Soit le circuit ci-contre où $e(t) = E\sqrt{2}\sin(\omega.t)$

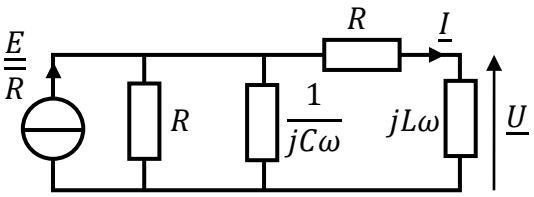
Déterminer l'expression de l'amplitude complexe $\underline{U}$ associée à la tension $u(t)$.

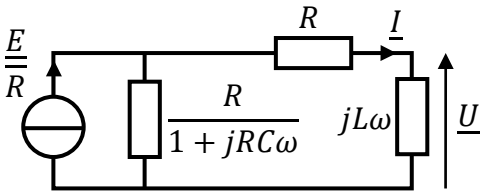


On passe en représentation complexe.

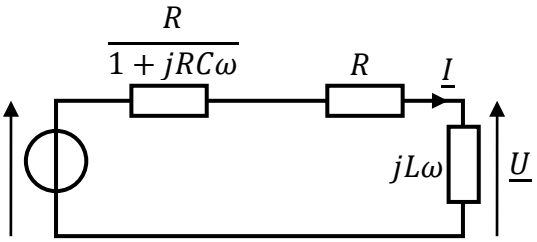


En utilisant les équivalences Thévenin/Norton, on obtient :





$$\frac{\underline{E}}{R} \times \frac{\mathrm{R}}{1+jRC\omega} = \frac{\underline{E}}{1+jRC\omega}$$



D'après la formule du Pont Diviseur de Tension, on aura alors :

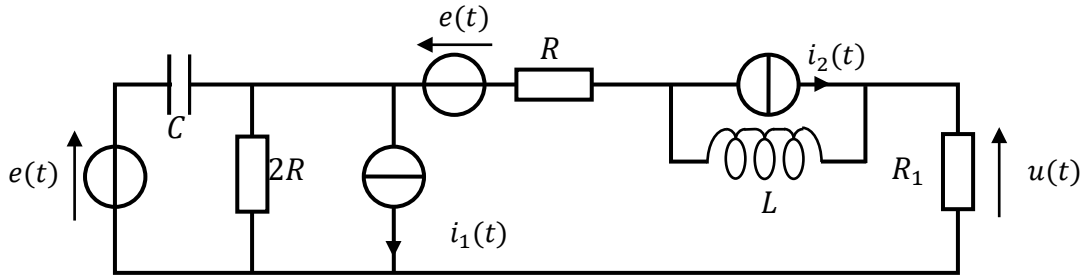
$$\underline{U} = \frac{jL\omega}{\frac{R}{1+jRC\omega} + R + jL\omega} \times \frac{\underline{E}}{1+jRC\omega}$$

$$= \frac{jL\omega}{R + (R+jL\omega) \times (1+jRC\omega)} \times \underline{E}$$

$$= \frac{jL\omega}{R + R + jR^2C\omega + jL\omega + j^2RLC\omega^2} \times \underline{E}$$

$$\underline{U} = \frac{jL\omega}{2R + j(R^2C + L)\omega - RLC\omega^2} \times \underline{E}$$

Exercice 5 :



Soit le circuit ci-dessus. On donne :

$$\begin{cases} i_1(t) = I.\sqrt{2}.cos(\omega t) \\ i_2(t) = I.\sqrt{2}.sin(\omega t) \\ e(t) = E.\sqrt{2}.sin\,(\omega t) \end{cases}$$

On suppose connus I, E, ω, L, R et C.

1. Donner les expressions des amplitudes complexes associées à $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $e(t)$.

Afin d'exprimer les amplitudes complexes, on commence par écrire les expressions des 3 signaux en utilisant la même fonction trigonométrique. Comme i_2 et e sont écrites avec un sinus, on va réécrire i_1 à l'aide d'un sinus.

$$\begin{cases} i_1(t) = I.\sqrt{2}.cos(\omega t) = I.\sqrt{2}.sin(\omega t + \pi/2) \\ i_2(t) = I.\sqrt{2}.sin(\omega t) \\ e(t) = E.\sqrt{2}.si\,n(\omega t) \end{cases}$$

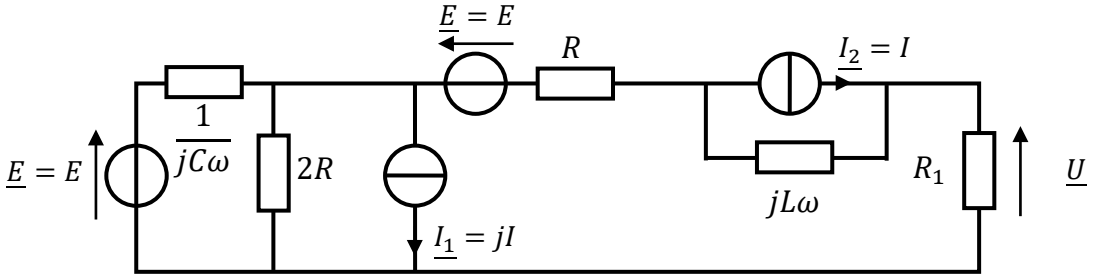
Ce qui donne alors :

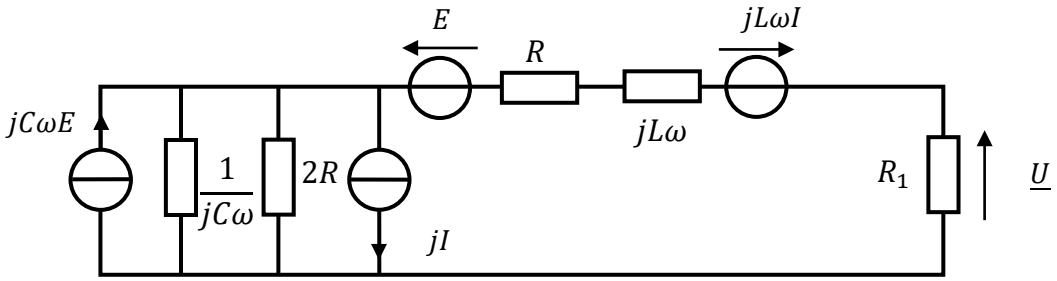
$$\begin{cases} \underline{I_1} = I.e^{j\frac{\pi}{2}} = j.I \\ \underline{I_2} = I.e^{j.0} = I \\ \underline{E} = E.e^{j.0} = I \end{cases}$$

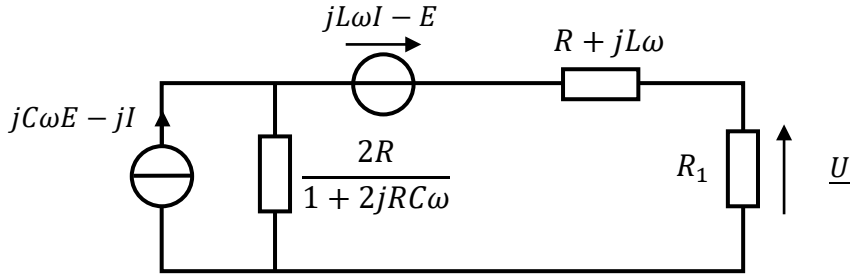
On rappelle que $e^{j\theta} = \cos(\theta) + jsin(\theta)$

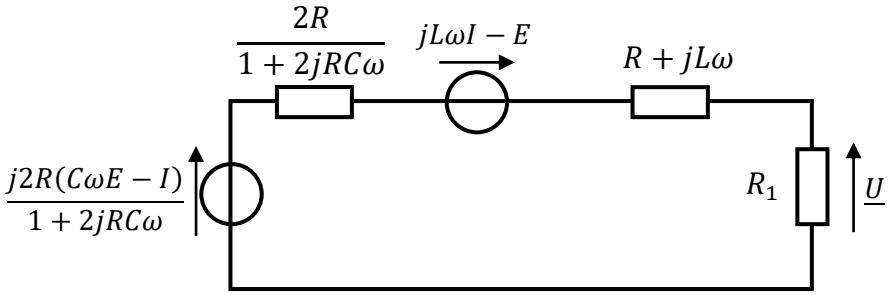
2. Déterminer l'expression de l'amplitude complexe $\underline{U}$ de la tension $u(t)$ aux bornes de R_1 en fonction des éléments connus.

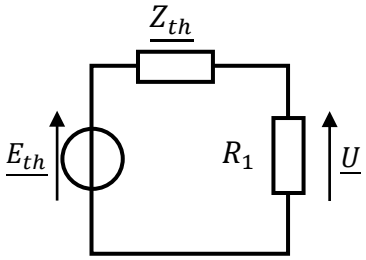
On passe en représentation complexe.











Avec :

$$\begin{cases} \underline{E_{th}} = \dfrac{j2R(C\omega E - I)}{1 + 2jRC\omega} + jL\omega I - E \\ \underline{Z_{th}} = \dfrac{2R}{1 + 2jRC\omega} + R + jL\omega \end{cases}$$

D'après la formule du Pont Diviseur de Tension, on aura alors :

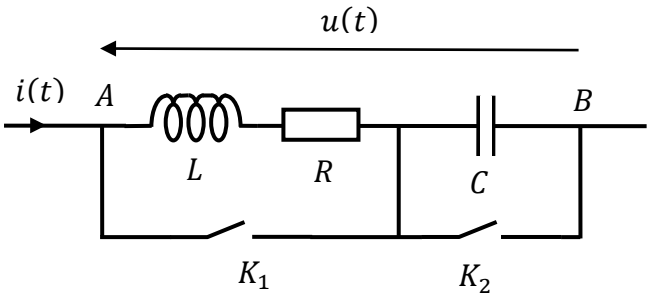
$$\underline{U} = \frac{R_1}{R_1 + \underline{Z_{th}}} \times \underline{E_{th}}$$

$$= \frac{R_1}{R_1 + \dfrac{2R}{1 + 2jRC\omega} + R + jL\omega} \times \frac{j2R(C\omega E - I) + (jL\omega I - E) \times (1 + 2jRC\omega)}{1 + 2jRC\omega}$$

$$\underline{U} = \frac{R_1 \times (j2R(C\omega E - I) + (jL\omega I - E) \times (1 + 2jRC\omega)}{R_1 + 2jR_1RC\omega + 2R + R + 2jR^2C\omega + jL\omega + j^2 2RLC\omega^2}$$

$$\underline{U} = R_1 \frac{-E - 2RLC\omega^2 I + j(L\omega - 2R)I}{3R + R_1 - 2RLC\omega^2 + j(2R_1RC\omega + 2R^2C\omega + L\omega)}$$

BONUS :



Soit le circuit ci-dessus dans lequel on impose entre les points A et B une tension alternative $u(t)$ de valeur efficace U.

On constate que l'intensité efficace du courant $i(t)$ passant dans le circuit est la même lorsque :

- K_1 et K_2 sont ouverts
- Seul K_1 est ouvert
- Seul K_2 est ouvert

Quelles relations existent entre R, L et C ?

Dans tous les cas, on aura $\underline{U} = \underline{Z_i} \times \underline{I_i}$ où $\underline{Z_i}$ représente l'impédance équivalente et $\underline{I_i}$, l'amplitude complexe du courant qui traverse $\underline{Z_i}$ pour chaque cas. On aura donc, dans tous les cas $\left|\underline{U}\right| = \left|\underline{Z_i}\right| \times \left|\underline{I_i}\right|$. La tension $u(t)$ étant la même dans les 3 cas, et le courant $i(t)$ ayant la même valeur efficace dans les 3 cas, les modules des 3 impédances équivalentes doivent être elles-aussi égales.

- *1er cas : K_1 et K_2 sont ouverts*

  On a alors : $\underline{Z_1} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}{jC\omega}$

  Donc : $\left|\underline{Z_1}\right| = \frac{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}{C\omega}$

- *2ème cas: Seul K_1 est ouvert*

  On a alors : $\underline{Z_2} = R + jL\omega$

  Donc : $\left|\underline{Z_2}\right| = \sqrt{R^2 + L\omega^2}$

- *3ème cas : Seul K_2 est ouvert*

  On a alors : $\underline{Z_3} = \frac{1}{jC\omega}$

  Donc : $\left|\underline{Z_3}\right| = \sqrt{\frac{1}{C\omega}^2} = \frac{1}{C\omega}+$

Ou aura donc : $\left|\underline{Z_1}\right| = \left|\underline{Z_2}\right| = \left|\underline{Z_3}\right| \implies \left|\underline{Z_1}\right|^2 = \left|\underline{Z_2}\right|^2 = \left|\underline{Z_3}\right|^2$

- $\left|\underline{Z_1}\right|^2 = \left|\underline{Z_3}\right|^2 \implies \frac{\left(1-LC\omega^2\right)^2+(RC\omega)^2}{(C\omega)^2} = \frac{1}{(C\omega)^2}$

$$(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2 = 1 \quad (Eq1)$$

- $\left|\underline{Z_2}\right|^2 = \left|\underline{Z_3}\right|^2 \implies R^2 + (L\omega)^2 = \frac{1}{(C\omega)^2}$

$$(RC\omega)^2 + (LC\omega^2)^2 = 1 \quad (Eq2)$$

Si on égalise nos 2 équations, on a :

$$(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2 = (RC\omega)^2 + (LC\omega^2)^2$$

$$(1 - LC\omega^2)^2 - (LC\omega^2)^2 = 0$$

$$\left((1 - LC\omega^2) + LC\omega^2\right).\left((1 - LC\omega^2) - LC\omega^2\right) = 0$$

$$1 - 2LC\omega^2 = 0$$

$$LC\omega^2 = \frac{1}{2} \quad (Eq3)$$

Puis, en injectant le résultat Eq3 dans Eq2, on a :

$$(RC\omega)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$(RC\omega)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$RC\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$$